

中国科学技术大学数学科学学院
2019夏令营试题-数分线代

数学分析

1. 请写出一个具体的定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上的函数 $f(x, y)$, 使得下式左右两边都有意义, 但是却不相等。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) dy.$$

有没有可能找到一个二元连续的 f , 满足如上的要求, 为什么?

2. 设某函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n (n > 1)$ 有一阶连续偏导数, 而且存在 $C > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 满足

$$|f(x) - f(y)| \geq C|x - y|.$$

求证: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, f 在 x 点的 Jacobi 矩阵 $Df(x)$ 可逆。

3. 设有二阶连续可导的函数 $f(x, y)$ 满足

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right| \leq 1, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

而且

$$f(1, 1) = f(1, -1) = f(-2, 0),$$

求证:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|(x, y), \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|(x, y) \leq 2019, \quad \forall x^2 + y^2 \leq 1.$$

4. 设函数列 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一致收敛的, 且对于任何 $x \in [0, 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ 是收敛的。问: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ 在 $[0, 1]$ 上是不是一致收敛的? 请给出理由。

线性代数

1. 设给定二次曲面在直角坐标系下的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 2z - 1 = 0$ 。利用正交变换和平移将其化为标准方程，并判断这是什么类型的曲面。
2. 设 $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ 。考虑复线性映射 $f: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}), X \mapsto AX - XA$ 。试计算 f 的特征多项式以及特征向量，判断并论证 f 是否可对角化。
3. 考虑 \mathbb{R}^4 中的向量组 $S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 2, 1, 1), \alpha_3 = (2, 1, 1, 0), \alpha_4 = (3, 3, 2, 1), \alpha_5 = (1, -1, 1, 1)\}$ 。计算 S 中包含向量 α_2 的所有极大线性无关组。
4. 设 n 阶复方阵 A, B 满足 $AB = BA$ 。试证明：存在可逆复方阵 P ，使得 PAP^{-1} 和 PBP^{-1} 同时为上三角方阵。